

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

Волгоградский институт управления - филиал РАНХиГС

Экономический факультет

(наименование структурного подразделения (института/факультета/филиала))

Кафедра информационных систем и математического моделирования

(наименование кафедры)

УТВЕРЖДЕНА

решением кафедры
Информационных систем и
математического моделирования

Протокол от «31» августа 2020 г.
№01

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.04 «Алгебра»

(индекс, наименование дисциплины (модуля), в соответствии с учебным планом)

38.03.01 Экономика

(код, наименование направления подготовки (специальности))

"Финансы и кредит"

(направленность(и) (профиль (и)/специализация(ии))

Бакалавр

(квалификация)

Очная

(форма(ы) обучения)

Год набора: 2020

Волгоград, 2020 г.

Авторы–составители:

к. ф-м.н., доцент, доцент кафедры «Фондовые рынки и финансовый инжиниринг»

Чернова М.В.

(ученая степень и(или) ученое звание, должность (наименование кафедры) (Ф.И.О.)

Заведующий кафедрой

«Фондовые рынки и финансовый инжиниринг» д.э.н.Корищенко К.Н.

(наименование кафедры) (ученая степень и(или) ученое звание) (Ф.И.О.)

СОДЕРЖАНИЕ

<u>1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы</u>	4
<u>2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО</u>	4
<u>3. Содержание и структура дисциплины</u>	5
<u>4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине</u>	7
<u>5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины</u>	23
<u>6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине</u>	25
<u>7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы</u>	26

1. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения программы

1.1. Дисциплина Б1.О.04 «Алгебра» обеспечивает овладение следующими компетенциями:

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКо ОС II - 2	Способность использовать алгебраические методы для решения прикладных задач	ПКо ОС II – 2.1	Создание парадигмы мышления в рамках национальной экономики базирующаяся на моделях линейной алгебры

1.2. В результате освоения дисциплины у студентов должны быть сформированы:
Использование трудовых функций обязательно только для профессиональных компетенций, установленных самостоятельно

2. Объем и место дисциплины в структуре ОП ВО **Объем дисциплины**

Дисциплина Б1.О.04 «Алгебра» составляет 5 зачетных единиц, т.е. 180 академических часов.

На контактную работу с преподавателем выделено 66 часов, из них 32 часа лекций и 32 часа практических занятий, 2 часа выделено на консультацию по промежуточной аттестации; на самостоятельную работу обучающихся выделено 78 часов для очной ф/о.

Место дисциплины в структуре ОП ВО

Дисциплина Б1.О.04 «Алгебра» изучается на 1 курсе, в 1 семестре для студентов очной.

Дисциплина Б1.О.04 «Алгебра» реализуется после изучения дисциплины Б1.Б.04 «Математический анализ».

Форма промежуточной аттестации в соответствии с учебным планом – экзамен в письменной форме.

3. Содержание и структура дисциплины **Очная форма обучения**

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Объем дисциплины, час.						Форма текущего контроля успеваемости**, промежуточной аттестации***
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СРС	
			Л	ЛР	ПЗ	КС Р		
Тема 1.	Матрицы и определители.	20	6		6		8	<i>К,Кол</i>
Тема 2.	Системы линейных уравнений.	22	6		6		10	<i>К,Кол</i>
Тема 3.	Векторы и операции над ними.	14	2		2		10	<i>К,Кол</i>
Тема 4.	Элементы аналитической геометрии.	22	6		6		10	<i>К,Кол</i>
Тема 5.	Линейные пространства.	18	4		4		10	<i>К,Кол</i>
Тема 6.	Евклидовы пространства.	14	2		2		10	<i>К,Кол</i>
Тема 7.	Линейные операторы.	18	4		4		10	<i>К,Кол</i>
Тема 8.	Квадратичные формы.	14	2		2		10	<i>К,Кол</i>
Консультации на промежуточную аттестацию		2						

№ п/п	Наименование тем (разделов)	Объем дисциплины, час.						Форма текущего контроля успеваемости**, промежуточной аттестации***
		Всего	Контактная работа обучающихся с преподавателем по видам учебных занятий				СРС	
			Л	ЛР	ПЗ	КС Р		
Промежуточная аттестация		36						Экз
Всего по курсу:		180	32		32		78	

** – формы текущего контроля успеваемости: контрольная работа (К), коллоквиум (Кол).

*** - разработчик указывает необходимые формы промежуточной аттестации: экзамен (Экз).

Содержание дисциплины

Тема 1. Матрицы и определители.

Основные сведения о матрицах. Умножение матрицы на число. Сложение и умножение матриц. Возведение матрицы в целую положительную степень. Транспонирование матриц. Введение определителя. Свойства определителей. Вычисление определителей. Существование обратной матрицы и её вычисление. Ранг матрицы.

Тема 2. Системы линейных уравнений.

Общие понятия систем линейных уравнений. Нахождение единственного решения систем линейных уравнений. Общий подход к решению систем уравнений. Условие разрешимости системы линейных уравнений. Однородные системы линейных уравнений. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.

Тема 3. Векторы и операции над ними.

Двумерное, трёхмерное, многомерное пространство. Линейные операции над векторами. Коллинеарные и компланарные векторы. Скалярное произведение. Векторное произведение.

Тема 4. Элементы аналитической геометрии.

Прямые линии на плоскости. Уравнение плоскости и прямой в пространстве. Линии и поверхности второго порядка.

Тема 5. Линейные пространства.

Понятие линейного векторного пространства. Вектор в n-мерном пространстве. Линейная зависимость и независимость векторов. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Линейные подпространства.

Тема 6. Евклидовы пространства.

Евклидово пространство. Свойства длины вектора. Ортогональные векторы. Ортонормированная система векторов. Ортогонализация.

Тема 7. Линейные операторы.

Линейные операторы и их свойства. Матрица оператора в различных базисах. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Симметричный оператор. Линейные модели обмена.

Тема 8. Квадратичные формы.

Понятие квадратичной формы. Связь между квадратичной формой и линейным оператором. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Положительно-определённые формы, отрицательно-определённые формы. Критерий Сильвестра.

4. Материалы текущего контроля успеваемости обучающихся и фонд оценочных средств промежуточной аттестации по дисциплине

4.1. Текущий контроль успеваемости

4.1.1. Формы текущего контроля успеваемости

Тема (раздел)	Методы текущего контроля успеваемости
Тема 1. Матрицы и определители.	Контрольная работа №1 Коллоквиум №1
Тема 2. Системы линейных уравнений.	Контрольная работа №2 Коллоквиум №2
Тема 3. Векторы и операции над ними.	Контрольная работа №3 Коллоквиум №3
Тема 4. Элементы аналитической геометрии.	Контрольная работа №3 Коллоквиум №3
Тема 5. Линейные пространства.	Контрольная работа №4 Коллоквиум №4
Тема 6. Евклидовы пространства.	Контрольная работа №4 Коллоквиум №4
Тема 7. Линейные операторы.	Контрольная работа №4 Коллоквиум №4
Тема 8. Квадратичные формы.	Контрольная работа №4 Коллоквиум №4

4.1.2. Материалы текущего контроля успеваемости

Типовые оценочные материалы по теме 1 «Матрицы и определители»

Варианты заданий контрольной работы №1

1. Найти произведение матриц $A \cdot B$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Пользуясь свойствами определителей и теоремой Лапласа вычислить определитель

матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Найти ранг матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу, обратную для матрицы $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 7 & -1 & 4 \\ 9 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

Вопросы к коллоквиуму №1

1. Определение матрицы. Элементы матрицы. Значение индексов элементов. Размерность матрицы.
2. Матрица – строка. Матрица – столбец. Одноэлементная матрица.
3. Квадратная матрица. Главная диагональ. Побочная диагональ.
4. Диагональная матрица. Единичная матрица. Нуль – матрица.
5. Равные матрицы. Транспонированная матрица. Симметрическая матрица.
6. Сумма матриц. Разность матриц. Условие существования суммы и разности матриц.
7. Свойства операции сложения матриц.
8. Произведение матрицы на число. Свойства операции умножения матрицы на число.
9. Произведение матриц. Условие существования произведения матриц.
10. Возведение матрицы в степень.
11. Понятие определителя и обозначения. Определитель первого порядка. Определитель второго порядка.
12. Определитель третьего порядка (формула). Правило треугольников.
13. Минор. Алгебраическое дополнение.

14. Теорема Лапласа. Вид определителя, для которого вычисления по теореме Лапласа упрощаются.

15. Свойства определителей (семь свойств).

16. Невырожденная матрица. Обратная матрица. Соотношение, которое выполняется для обратной матрицы.

17. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединенной.

18. Элементарные преобразования строк матрицы. Эквивалентные матрицы.

19. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

20. Минор k-го порядка. Определение ранга матрицы (через миноры).

21. Свойства ранга матрицы. Базисный минор.

22. Алгоритм вычисления ранга матрицы методом окаймления миноров.

23. Теорема об элементарных преобразованиях матрицы. Ступенчатая матрица. Ранг.

24. Алгоритм вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Типовые оценочные материалы по теме 2 «Системы линейных уравнений.»

Вариант заданий контрольной работы №2

1. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы, выполнить

проверку правильности решения:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1. \\ 5x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

2. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера, выполнить проверку

правильности решения:
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1. \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

3. Методом Гаусса найти общее решение и одно частное решение системы линейных уравнений, выполнить проверку правильности полученного частного решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 6. \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 6 \end{cases}$$

Вопросы к коллоквиуму №2

1. Линейное уравнение. Понятие системы m линейных уравнений с n неизвестными.

2. Решение системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы линейных уравнений.

3. Определенные и неопределенные системы линейных уравнений. Частное и общее решение.

4. Равносильные системы линейных уравнений. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Тривиальные и противоречивые уравнения.
5. Системы n линейных уравнений с n неизвестными.
6. Матричный способ решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.
7. Главный и вспомогательные определители системы. Правило Крамера решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.
8. Особые случаи при решении систем линейных уравнений по формулам Крамера.
9. Понятие систем m линейных уравнений с n неизвестными.
10. Теорема Кронекера-Капелли.
11. Алгоритм метода Гаусса.
12. Представление процесса производства за определенный период (таблица с пояснением).
13. Соотношения баланса. Натуральный и стоимостный межотраслевые балансы.
14. Гипотеза линейности Лентьева. Коэффициент прямых затрат.
15. Вектор валового выпуска. Вектор конечного потребления. Матрица прямых затрат.
16. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
17. Матрица полных затрат. Продуктивная матрица.
18. Критерии продуктивности. Чистая продукция.

Типовые оценочные материалы по теме 3 «Векторы и операции над ними.»

Вариант заданий контрольной работы №3

1. Выяснить, являются ли векторы $\vec{a}(3,6)$ и $\vec{b}(-1,2)$ коллинеарными.
2. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 8$, $\varphi = 135^\circ$.
3. Найти скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и угол между векторами $\vec{a}(1,2,3)$ и $\vec{b}(-1,0,1)$.
4. Найти значение коэффициента k , при котором векторы $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = 5\vec{p} + k\vec{q}$ ортогональны, если векторы $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не коллинеарные.
5. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ и синус угла между векторами $\vec{a}(-2,1,4)$ и $\vec{b}(3,0,-1)$.

6. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{p} - \vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + 6\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - векторы длины 2, угол между которыми равен 60° .

7. Даны векторы $\vec{a}(3,2,2)$, $\vec{b}(4,-1,5)$ и $\vec{c}(0,-7,5)$. Найти смешанное произведение $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right)$.

12. При каком значении λ векторы $\vec{a}(0,\lambda,2)$, $\vec{b}(1,2\lambda,0)$ и $\vec{c}(3,4,1)$ компланарные.

Вопросы к коллоквиуму №3

1. Линейные операции над векторами.
2. Коллинеарные и компланарные векторы.
3. Скалярное произведение.
4. Векторное произведение.

Типовые оценочные материалы по теме 4 «Элементы аналитической геометрии.»

Вариант заданий контрольной работы №3

1. Дан параллелограмм $ABCD$, три вершины которого заданы $A(-2,-1,5)$, $B(-3,1,3)$, $C(5,4,-2)$. Найти четвертую вершину и острый угол параллелограмма.

2. Найти длину высоты AD в треугольнике с вершинами $A(3,5)$, $B(2,-4)$, $C(-2,1)$ и написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AB .

3. Найти угол между плоскостью $3x - 6y + 8z - 9 = 0$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $M(2,-3,5)$. Вычислить расстояние между этой плоскостью и точкой.

4. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(3,-4,2)$ на прямую $\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z+4}{-6}$.

5. Построить кривые по заданным уравнениям: $(x-1)^2 + (x+2)^2 = 9$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, $y^2 = 7x$.

Вопросы к коллоквиуму №3

1. Простейшие задачи аналитической геометрии (расстояние между двумя точками; площадь треугольника; деление отрезка в данном отношении).
2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

3. Уравнение прямой заданной точкой и угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой заданной двумя точками.
5. Общее уравнение прямой.
6. Уравнение прямой в отрезках.
7. Взаимное расположение двух прямых заданных в общем виде.
8. Угол между прямыми.
9. Условия параллельности и перпендикулярности.
10. Расстояние от точки до прямой.
11. Уравнение плоскости заданной точкой и вектором нормали.
12. Общее уравнение плоскости.
13. Уравнение плоскости в отрезках.
14. Взаимное расположение двух плоскостей.
15. Общее уравнение прямой в пространстве.
16. Канонические уравнения прямой.
17. Параметрические уравнения прямой.
18. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.
19. Взаимное расположение прямой и плоскости.
20. Окружность, эллипс (определение; основные обозначения; каноническое уравнение; график; эксцентриситет эллипса).
21. Гипербола (определение; основные обозначения; каноническое уравнение; график; сопряженная гипербола; эксцентриситет гиперболы).

22. Парабола (определение; основные обозначения; каноническое уравнение; график).

Типовые оценочные материалы по теме 5 «Линейные пространства.»

Вариант заданий контрольной работы №4

1. В некотором базисе даны вектора $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 1)$, $a_3 = (-1, -2, 1)$. Найти все значения m , при которых вектор $b = (2, 3, m)$ линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 .
2. Выяснить является ли систем векторов линейно зависимой:
 $a_1 = (-1, 7, 1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 2, 1)$, $a_3 = (4, 4, 4, -3)$, $a_4 = (1, 6, -1, 1)$.
3. Выяснить ранг и указать какой-нибудь базис системы векторов:
 - 1) $a_1 = (1, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 3)$, $a_3 = (1, 5, 0)$, $a_4 = (2, -2, 4)$;
 - 2) $a_1 = (1, 1, 4, 2)$, $a_2 = (1, -1, -2, 4)$, $a_3 = (0, 2, 6, -2)$, $a_4 = (-3, 3, 3, -12)$, $a_5 = (-1, 0, -4, -3)$.
4. Выяснить, образуют ли базис трехмерного пространства R^3 векторы $a_1 = (1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 1)$, $a_3 = (2, 1, 2)$.

5. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных

уравнений:
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = 0 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}.$$

6. В базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ задан вектор $x = (4, 0, -12)$. Найти координаты этого вектора в базисе $B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, где $e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3$, $e'_3 = 3e_1 + 4e_2 + 3e_3$.

7. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $B = \{e_1, e_2\}$ к базису $B' = \{e'_1, e'_2\}$.

Найти координаты векторов e_1, e_2 в базисе B' .

8. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ перехода от базиса $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ к базису

$B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$. Найти координаты вектора e'_2 в базисе B .

Вопросы к коллоквиуму №4

1. Определение линейного пространства. Аксиомы линейного пространства.
2. n -мерный арифметический вектор. Сумма, произведение арифметических векторов.
3. n -мерное арифметическое векторное пространство.
4. Система, подсистема и линейная комбинация векторов.
5. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
6. Базис и ранг системы векторов.
7. Базис и размерность линейного пространства.
8. Системы линейных однородных уравнений. Тривиальное решение.
9. Существование различного числа решений однородной системы линейных уравнений.
10. Фундаментальная система решений (понятие, две теоремы).
11. Алгоритм построения фундаментальной системы решений.
12. Связь между однородными и соответствующими неоднородными системами линейных уравнений.
13. Преобразование координат вектора при переходе от базиса к базису. Матрица перехода.

Типовые оценочные материалы по теме 6 «Евклидовы пространства»

Вариант заданий контрольной работы №4

1. Нормировать вектор x , заданный в ортонормированном базисе соответствующего евклидова пространства: $x = 4e_1 - 2e_2 + 2e_3 - e_4$.

2. Определить угол между векторами $x = \sqrt{7}e_1 + \sqrt{5}e_2 + \sqrt{3}e_3 + e_4$ и $y = \sqrt{7}e_1 + \sqrt{5}e_2 + e_3 - e_4$, заданными в ортонормированном базисе.

3. Проверить, что векторы $x = (3, 1, 2)$ и $y = (-1, 1, 1)$ ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса пространства E^3 .

Вопросы к коллоквиуму №4

1. Скалярное произведение векторов.
2. Евклидово пространство. n -мерное арифметическое евклидово пространство.
3. Длина вектора и ее свойства.
4. Угол между векторами.
5. Ортогональные векторы и их свойства.
6. Ортогональный базис. Ортонормированный базис.
7. Процесс ортогонализации.

Типовые оценочные материалы по теме 7 «Линейные операторы.»

Вариант заданий контрольной работы №4

1. Выяснить, является ли оператор $\varphi(z)$ линейным, если вектор $z = (z_1, z_2, z_3)$:
 $\varphi(z) = (z_2 - 2z_3; z_1 + z_2; z_1)$.

2. Линейный оператор φ задан матрицей A_φ . Найти координаты вектора $y = \varphi(x)$ в этом же базисе: $A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x = (2, 4, -1)$.

3. В пространстве L действует линейный оператор φ , заданный в базисе $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти координаты: образа вектора $x = (1, 4, 1)_B$; прообраза вектора $y = (1, 2, 3)_B$.

4. Найти матрицу A'_φ линейного оператора φ в базисе $B' = \{e'_1, e'_2\}$, заданного матрицей A_φ в базисе $B = \{e_1, e_2\}$: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$, $e'_1 = -2e_1 + e_2$, $e'_2 = 2e_1 - 3e_2$.

5. Пусть оператор φ в базисе $B = \{e_1, e_2\}$ имеет матрицу $A_\varphi = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, а оператор ψ в базисе $B' = \{e'_1, e'_2\}$, где $e'_1 = -7e_1 + 5e_2$, $e'_2 = -8e_1 + 6e_2$ имеет матрицу $A'_\psi = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$. Найти матрицы операторов $\varphi + \psi$ и $\varphi \cdot \psi$ в базисе $B' = \{e'_1, e'_2\}$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы оператора φ , заданного матрицей $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Вопросы к коллоквиуму №4

1. Оператор, образ, прообраз.
2. Линейный оператор.
3. Матрица линейного оператора.
4. Связь между образом и прообразом.
5. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.
6. Равные операторы. Действия над операторами.
7. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора.
8. Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора.
9. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора.
10. Алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений.
11. Спектр линейного оператора. Оператор с простым спектром.
12. Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы.
13. Линейное преобразование переменных.
14. Эквивалентные квадратичные формы.
15. Канонический вид квадратичной формы.
16. Метод Лагранжа.
17. Метод ортогональных преобразований.
18. Закон инерции квадратичных форм.
19. Классификация квадратичных форм.
20. Критерий Сильвестра.
21. Простая модель обмена. Матрица обмена.
22. Модель международной торговли. Структурная матрица торговли.

Типовые оценочные материалы по теме 8 «Квадратичные формы»

Вариант заданий контрольной работы №4

1. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = -16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$ к каноническому виду методом Лагранжа.
2. Привести квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.
3. Исследовать квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ на знакоопределенность.
4. При каких значениях параметра a данная квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ является знакоопределенной.

Вопросы к коллоквиуму №4

1. Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы.
2. Линейное преобразование переменных.
3. Эквивалентные квадратичные формы.
4. Канонический вид квадратичной формы.
5. Метод Лагранжа.
6. Метод ортогональных преобразований.
7. Закон инерции квадратичных форм.
8. Классификация квадратичных форм.
9. Критерий Сильвестра.

Методические материалы, позволяющие оценивать знания и умения учащихся

Процедура проведения, критерии и шкала оценивания коллоквиума

Коллоквиум проводится на практических занятиях в форме индивидуальной беседы преподавателя с каждым обучающимся.

Преподаватель задает несколько (4-5) кратких вопросов, позволяющих выяснить степень освоения материала обучающимся.

Ответ на каждый вопрос оценивается отдельно.

Критерии оценивания	Полнота ответа на вопрос, знание терминологии; способность аргументировать свой ответ; способность раскрывать причинно-следственные связи между экономическими фактами, явлениями и процессами; способность делать выводы.
Шкала оценивания	«Отлично» - вопрос раскрыт полностью, точно обозначены основные понятия и характеристики по теме.

	«Хорошо» - вопрос раскрыт, однако нет полного описания всех необходимых элементов. «Удовлетворительно» - вопрос раскрыт не полно, присутствуют грубые ошибки, однако есть некоторое понимание раскрываемых понятий. «Неудовлетворительно» - ответ на вопрос отсутствует или в целом не верен.
--	--

По итогам ответов на каждый вопрос выставляется общий балл за коллоквиум.

Процедура проведения, критерии и шкала оценивания контрольной работы

При проведении контрольной работы обучающимся предлагается выполнить несколько практических заданий (4-5) в соответствии с пройденными темами.

Время написания контрольной работы составляет 90 мин. (по желанию обучающегося ответ может быть досрочным).

Критерии оценивания	Каждое задание контрольной работы оценивается определенным количеством баллов (в соответствии с этапами выполнения задания). Оценивается: ход решения задачи, наличие ошибок в расчетах, наличие верного ответа. Баллы, полученные студентом за решение каждого задания, суммируются. Общее количество возможных баллов за контрольную работу принимаются за 100%.
Шкала оценивания	«Отлично»: - 86%-100% правильных ответов и решений. «Хорошо»: - 71%-84% правильных ответов и решений. «Удовлетворительно»: - 51%-70% правильных ответов и решений. «Неудовлетворительно»: - менее 50% правильных ответов и решений.

4.2. Промежуточная аттестация

4.2.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы. Показатели и критерии оценивания компетенций с учетом этапа их формирования

Код компетенции	Наименование компетенции	Код этапа освоения компетенции	Наименование этапа освоения компетенции
ПКо ОС II - 2	Способность использовать алгебраические методы для решения	ПКо ОС II – 2.1	Создание парадигмы мышления в рамках национальной экономики базирующаяся на моделях линейной алгебры

	прикладных задач		
--	------------------	--	--

Этап освоения компетенции	Показатель оценивания	Критерий оценивания
ПКо ОС II – 2.1 Создание парадигмы мышления в рамках национальной экономики базирующаяся на моделях линейной алгебры	Способен выбирать алгебраические методы для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, а также применять навыки анализа результатов расчетов и обоснования полученных выводов	Демонстрирует навыки выбора и использования методов линейной алгебры для решения задач в сфере экономики, финансов и бизнеса, интерпретации и анализа полученных результатов, с применением креативных решений, основывающихся на личных взглядах.

4.2.2. Форма и средства (методы) проведения промежуточной аттестации

Формой промежуточного контроля после изучения дисциплины является экзамен в письменной форме.

Ответственным этапом учебного процесса является сдача промежуточная аттестация. Бесспорным фактором успешного завершения очередного семестра является кропотливая, систематическая работа студента в течение всего семестра. В этом случае подготовка к промежуточной аттестации будет являться концентрированной систематизацией всех полученных знаний по данной дисциплине.

В начале семестра рекомендуется по всем изучаемым предметам получить вопросы к промежуточной аттестации, а также использовать в процессе обучения программу, другие методические материалы, разработанные по данной дисциплине.

При подготовке к промежуточной аттестации конструктивным является коллективное обсуждение выносимых на экзамен вопросов с сокурсниками, что позволяет повысить степень систематизации и углубления знаний.

Перед последним семинаром по предмету следует составить список вопросов, требующих дополнительного разъяснения преподавателем на консультации перед промежуточной аттестацией.

4.2.3. Типовые оценочные средства

Список вопросов для подготовки к экзамену

1. Определение матрицы. Элементы матрицы. Значение индексов элементов. Размерность матрицы.
2. Матрица – строка. Матрица – столбец. Одноэлементная матрица.
3. Квадратная матрица. Главная диагональ. Побочная диагональ.
4. Диагональная матрица. Единичная матрица. Нуль – матрица.
5. Равные матрицы. Транспонированная матрица. Симметрическая матрица.
6. Сумма матриц. Разность матриц. Условие существования суммы и разности матриц.
7. Свойства операции сложения матриц.
8. Произведение матрицы на число. Свойства операции умножения матрицы на число.
9. Произведение матриц. Условие существования произведения матриц.
10. Возведение матрицы в степень.
11. Понятие определителя и обозначения. Определитель первого порядка. Определитель второго порядка.
12. Определитель третьего порядка (формула). Правило треугольников.
13. Минор. Алгебраическое дополнение.
14. Теорема Лапласа. Вид определителя, для которого вычисления по теореме Лапласа упрощаются.
15. Свойства определителей (семь свойств).
16. Невырожденная матрица. Обратная матрица. Соотношение, которое выполняется для обратной матрицы.
17. Нахождение обратной матрицы с помощью присоединенной.
18. Элементарные преобразования строк матрицы. Эквивалентные матрицы.
19. Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.

20. Минор k -го порядка. Определение ранга матрицы (через миноры).
21. Свойства ранга матрицы. Базисный минор.
22. Алгоритм вычисления ранга матрицы методом окаймления миноров.
23. Теорема об элементарных преобразованиях матрицы. Ступенчатая матрица. Ранг.
24. Алгоритм вычисления ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
25. Линейное уравнение. Понятие системы m линейных уравнений с n неизвестными.
26. Решение системы линейных уравнений. Совместные и несовместные системы линейных уравнений.
27. Определенные и неопределенные системы линейных уравнений. Частное и общее решение.
28. Равносильные системы линейных уравнений. Элементарные преобразования систем линейных уравнений. Тривиальные и противоречивые уравнения.
29. Системы n линейных уравнений с n неизвестными.
30. Матричный способ решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.
31. Главный и вспомогательные определители системы. Правило Крамера решения систем n линейных уравнений с n неизвестными.
32. Особые случаи при решении систем линейных уравнений по формулам Крамера.
33. Понятие систем m линейных уравнений с n неизвестными.
34. Теорема Кронекера-Капелли.
35. Алгоритм метода Гаусса.
36. Представление процесса производства за определенный период (таблица с пояснением).
37. Соотношения баланса. Натуральный и стоимостный межотраслевые балансы.
38. Гипотеза линейности Леонтьева. Коэффициент прямых затрат.
39. Вектор валового выпуска. Вектор конечного потребления. Матрица прямых затрат.
40. Уравнение линейного межотраслевого баланса.
41. Матрица полных затрат. Продуктивная матрица.
42. Критерии продуктивности. Чистая продукция.
44. Линейные операции над векторами.
45. Скалярное произведение векторов.
46. Векторное произведение векторов.
47. Смешанное произведение векторов.
48. Определение линейного пространства. Аксиомы линейного пространства.
49. n -мерный арифметический вектор. Сумма, произведение арифметических векторов.
50. n -мерное арифметическое векторное пространство.
51. Система, подсистема и линейная комбинация векторов.
52. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов.
53. Базис и ранг системы векторов.
54. Базис и размерность линейного пространства.
55. Преобразование координат вектора при переходе от базиса к базису. Матрица перехода.
56. Скалярное произведение векторов.
57. Евклидово пространство. n -мерное арифметическое евклидово пространство.
58. Длина вектора и ее свойства.
59. Угол между векторами.
60. Ортогональные векторы и их свойства.
61. Ортогональный базис. Ортонормированный базис.
62. Системы линейных однородных уравнений. Тривиальное решение.
63. Существование различного числа решений однородной системы линейных уравнений.

64. Фундаментальная система решений (понятие, две теоремы).
65. Алгоритм построения фундаментальной системы решений.
66. Связь между однородными и соответствующими неоднородными системами линейных уравнений.
67. Оператор, образ, прообраз.
68. Линейный оператор.
69. Матрица линейного оператора.
70. Связь между образом и прообразом.
71. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах.
72. Равные операторы. Действия над операторами.
73. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора.
74. Свойства собственных векторов и собственных значений линейного оператора.
75. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора.
76. Алгоритм нахождения собственных векторов и собственных значений.
77. Спектр линейного оператора. Оператор с простым спектром.
78. Определение квадратичной формы. Матрица квадратичной формы.
79. Линейное преобразование переменных.
80. Эквивалентные квадратичные формы.
81. Канонический вид квадратичной формы.
82. Метод Лагранжа.
83. Закон инерции квадратичных форм.
84. Классификация квадратичных форм.
85. Критерий Сильвестра.
86. Простая модель обмена. Матрица обмена.
87. Модель международной торговли. Структурная матрица торговли.

Примерные варианты экзаменационных билетов

Экзаменационный билет №1

по дисциплине «Алгебра»

1. Векторное произведение векторов.
2. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора.
3. Пользуясь свойствами определителей и теоремой Лапласа вычислить определитель

матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & -3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & -8 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Проверить, что векторы $x = (3, 1, 2)$ и $y = (-1, 1, 1)$ ортогональны, и дополнить их до ортогонального базиса пространства E^3 .

Экзаменационный билет №2

по дисциплине «Алгебра»

1. Произведение матриц. Условие существования произведения матриц.
2. Евклидово пространство. n-мерное арифметическое евклидово пространство.
3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера, выполнить проверку

правильности решения:
$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

4. Найти векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ и синус угла между векторами $\vec{a}(4, -2, 3)$ и $\vec{b}(-3, 3, -6)$.

Шкала оценивания

Критерии оценивания	Оценка
Демонстрирует знание материала в полном объеме, логически правильно излагает ответы на вопросы; имеет навык правильного выбора и использования методов линейной алгебры для решения задач в сфере экономики, финансов и бизнеса, интерпретации и анализа полученных результатов.	5 (отлично)
Демонстрирует знание материала в полном объеме, но незначительно нарушает последовательность изложения, дает неуверенные и недостаточно полные ответы на вопросы; правильно выбирает, методы линейной алгебры для решения задач в сфере экономики, финансов и бизнеса, интерпретации и анализа полученных результатов, но имеет небольшие затруднения при реализации методов.	4 (хорошо)
Демонстрирует знание предмета, но материал излагает фрагментарно и непоследовательно, допускает ошибки в применении метода решения, задачу решает частично; имеет затруднения при выборе методов линейной алгебры для решения задач в сфере экономики, финансов и бизнеса; не имеет навыка интерпретации и анализа полученных результатов.	3 (удовлетворительн о)
Не демонстрирует усвоение основного содержания предмета, обнаруживает незнание большей части учебного материала, допускает грубые ошибки в определении понятий и при решении задач; не умеет проводить анализ профессиональных задач; невыработаны навыки выбора и использования методов линейной алгебры для решения задач в сфере экономики, финансов и бизнеса, интерпретации и анализа полученных результатов.	2 (неудовлетворител ьно)

4.3. Методические материалы

Процедура проведения письменного экзамена

Аттестационные испытания проводятся преподавателем, ведущим лекционные занятия по данной дисциплине.

При проведении письменного экзамена в аудитории может одновременно находиться экзаменуемая группа в полном составе.

Экзаменационный билет выбирает сам экзаменуемый в случайном порядке.

Экзаменуемые могут пользоваться программой учебной дисциплины, а также с разрешения преподавателя калькуляторами.

При проведении экзамена экзаменуемым предлагается ответить на два теоретических вопроса и выполнить два практических задания в соответствии с пройденными темами.

Время написания экзаменационной работы составляет 90 мин. (по желанию экзаменуемого ответ может быть досрочным).

Изложение материала ведется в листе ответа, который затем (по окончании экзамена) сдается на проверку экзаменатору.

Проверка работ выполняется экзаменатором после окончания экзамена и оценки выставляются в соответствии с критериями оценивания.

В случае возникновения сомнений относительно глубины знаний экзаменуемого экзаменатор может пригласить его и задать дополнительные и уточняющие вопросы в пределах учебного материала, вынесенного на экзамен.

Оценка результатов письменного аттестационного испытания объявляется экзаменуемым в день его проведения.

5. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Методические указания по выполнению контрольных работ:

Данный вид работы проверяет:

- 1) усвоение обучающимися полученных в ходе обучения умений и навыков;
- 2) способность выбрать инструментальные средства для обработки данных в соответствии с поставленной задачей;
- 3) умение проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.

Примерно за 2-3 недели до проведения контрольной работы обучающемуся необходимо получить у преподавателя шаблон контрольной работы или примерный перечень практических заданий, входящих в контрольную работу, и после этого приступить к подготовке.

При подготовке к контрольной работе следует:

- 1) повторить теоретический материал по темам, включенным в контрольную работу;
- 2) просмотреть материалы практических занятий и домашних заданий;
- 3) попробовать решить задания из шаблона контрольной работы или примерного перечня практических заданий;
- 4) закрепить полученные умения и навыки, решая похожие задания из рекомендованных преподавателем учебников и учебно-методических пособий.

Если в процессе подготовки к контрольной работе возникли затруднения или требуются какие-либо уточнения и рекомендации, следует обратиться за помощью к преподавателю.

Методические указания по подготовке к коллоквиуму:

Коллоквиум – это собеседование преподавателя и учащегося по заранее определенным контрольным вопросам.

Особенность коллоквиума в том, что это не просто форма контроля, а метод углубления, закрепления знаний учащихся, так как в ходе собеседования преподаватель имеет возможность разъяснить вопросы, возникающие у учащегося в процессе подготовки.

Этот вид деятельности развивает навык осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач.

На самостоятельную подготовку к коллоквиуму обучающемуся отводится 2-3 недели.

При подготовке к коллоквиуму следует:

- 1) просмотреть конспекты лекций и практических занятий и отметить в них имеющиеся ответы на вопросы коллоквиума;
- 2) если конспекты содержат не все ответы или часть вопросов вынесено преподавателем на самостоятельное рассмотрение, необходимо изучить содержание учебной литературы, рекомендованной преподавателем;
- 3) в случае возникновения каких-либо затруднений при подготовке следует обратиться за помощью к преподавателю.

Самоподготовка к практическим занятиям

При подготовке к практическому занятию обучающемуся необходимо:

- 1) ознакомиться с соответствующей темой программы дисциплины;
- 2) осмыслить круг изучаемых вопросов и логику их рассмотрения;
- 3) тщательно изучить лекционный материал;
- 4) изучить рекомендованную литературу по данной теме;
- 5) ознакомиться с вопросами очередного практического занятия.

Важным аспектом самостоятельной подготовки студентов является работа с библиотечным фондом.

Эта работа предполагает различные варианты повышения профессионального уровня студентов в том числе:

- а) получение книг в научном абонементе;
- б) изучение книг, журналов, газет в читальном зале;
- в) возможность поиска необходимого материала посредством электронного каталога;
- г) получение необходимых сведений об источниках информации у сотрудников библиотеки.

6. Учебная литература и ресурсы информационно-телекоммуникационной сети

"Интернет", включая перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Основная литература.

1. Артамонов. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Курс лекций для экономических специальностей. М.: «Дело» 2012, 212с.
2. Малугин, В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для бакалавриата и специалитета / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 478 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-02976-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://biblio-online.ru/bcode/4331763>
3. Проскуряков, И.В. Сборник задач по линейной алгебре : учебное пособие / И.В. Проскуряков. — 14-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2019. — 476 с. — ISBN 978-5-8114-4044-3. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/114701>

6.2. Дополнительная литература.

1. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник / Д.В. Беклемишев. — 17-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-4748-0. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/126146>

2. Малугин, В. А. Линейная алгебра для экономистов. Учебник, практикум и сборник задач : для вузов / В. А. Малугин, Я. А. Рощина. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 478 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02976-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/450583>

3. Высшая математика для экономистов [Электронный ресурс] : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2015. — 481 с. — 978-5-238-00991-9. — Режим доступа: <http://www.iprbookshop.ru/52071.html>

6.3. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы.

Не предусмотрено.

6.4. Нормативные правовые документы.

Не предусмотрено.

6.5. Интернет-ресурсы.

Не предусмотрено.

6.6. Иные источники.

1. Красс М. С., Чупрынов Б. П. Математика для экономистов, учебное пособие, М. :Питер, 2008.
2. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. П.С. Геворкяна. М.: Экономика, 2013.
3. Щипачев В.С. Курс высшей математики: учебник. М.: Оникс, 2014.

4. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие. Под ред. В.И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2012.
5. Красс, М. С. Математика в экономике: математические методы и модели : учебник для бакалавров / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов ; под ред. М. С. Красса. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 541 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс).
<https://www.biblio-online.ru/book/59085F8E-A601-4B28-94B2-44631637F7FE>
6. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 421 с.
<https://www.biblio-online.ru/book/2ADA68F7-F980-48FF-87B0-C9740B9941DF>

7. Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы

Базы данных, информационно-справочные и поисковые системы

1. www.biblio-online.ru –Электронно-библиотечная система [ЭБС] Юрайт.
2. <http://www.iprbookshop.ru> – Электронно-библиотечная система [ЭБС] «Iprbooks»
3. <https://e.lanbook.com> - Электронно-библиотечная система [ЭБС] «Лань».
4. <http://elibrary.ru/> - Научная электронная библиотекаElibrary.ru.
5. <https://new.znaniy.com> Электронно-библиотечная система [ЭБС] «Znaniy.com».
6. <https://dlib.eastview.com> – Информационный сервис «EastView».
7. <https://www.jstor.org> - Jstor. Полные тексты научных журналов и книг зарубежных издательств.
8. <https://elibrary.worldbank.org> - Электронная библиотека Всемирного Банка.
9. <https://link.springer.com> - Полнотекстовые политематические базы академических журналов и книг издательства Springer.
10. <https://ebookcentral.proquest.com> - Ebook Central. Полные тексты книг зарубежных научных издательств.
11. <https://www.oxfordhandbooks.com> - Доступ к полным текстам справочников Handbooks издательства Oxford по предметным областям: экономика и финансы, право, бизнес и управление.
12. <https://journals.sagepub.com> - Полнотекстовая база научных журналов академического издательства Sage.
13. Справочно-правовая система «Консультант».
14. Электронный периодический справочник «Гарант».

Программные, технические и электронные средства обучения и контроля знаний

Аудитории оснащены компьютером с выходом в интернет.
Программный продукт Microsoft Office.